

Numerical methods in theory of topological solitons

Ya. M. Shnir

1. Summary

One of the most interesting directions of research in modern theoretical physics, which originates from celebrated work by E. Fermi, J. Pasta and S. Ulam (Document LA-1940, May 1955), is related with numerical investigation of various non-linear systems. It was demonstrated there are particle-like localized configurations, *solitons*, which arise as solutions of the classical field equations. Furthermore, stability of these configurations in many cases is secured by topology.

Since the appearance of the soliton solutions on the theoretical scene in the 1970s, it becomes evident they are very important in classical and quantum field theory. Apart from being responsible for various non-perturbative effects, soliton-like solutions which represent static localised regular field configurations can be viewed as dual counterparts of the states of the perturbative spectrum. Furthermore, sometimes the solitons can be considered as a model of elementary particles. It is from this viewpoint that solitons were originally introduced to theoretical physics in the context of the Skyrme model.

Simplest example of the topological solitons in one dimension is the class of the kink solutions which appear in the model with a potential with two or more degenerated minima. Double well potential corresponds to the non-integrable ϕ^4 model. Further extensions of this model are possible, for example one can consider domain walls obtained by embedding of the 1+1-dimensional ϕ^4 -kink into higher dimensions. This model has a number of application in condensed matter physics, biology, non-linear optics and cosmology.

A new development is related to the investigation of the role which soliton solutions can play in the AdS/CFT correspondence, where this abbreviation stands for Anti-de Sitter/Conformal Field Theory. The correspondence expresses the equivalence of two very different types of theories. The first type of theory represents some theory of gravity describing curved space-times, while the second type of theory represents some field theory in a flat space-time with one dimension less. It has then turned out that the AdS/CFT correspondence provides a powerful tool to analyze strongly correlated systems in condensed matter physics with many interesting applications in superconductivity, superfluidity and the quantum Hall effect. Thus, by studying the solutions of some

gravity theories, which are completely accessible, in principle, one can learn a lot about the properties of strongly coupled theories, which are extremely hard to obtain in any other way and which are at the same time highly relevant for physical systems in condensed matter physics, for instance.

Complexity of the non-linear systems which may support existence of the soliton configurations, has stimulated rapid development of the corresponding numerical methods. Typically, investigation of the simplest one dimensional solitons is related with application of sophisticated numerical techniques and intensive use of modern parallel computing. These methods have founded a lot of different and somewhat unexpected applications, like for example in calculations of trajectories of deep space spacecrafts (ZARN, Bremen, Germany; Pasadena Jet Propulsion Lab, USA) or in the modeling of the phase transition in the Early Universe (Parallel Cluster "Cosmos Cambridge, UK), or in computing of the phase structure of the liquid Helium (CSC – IT Center for Science, Finland) or in the QCD lattice simulations (JINR, ITEP, Russia).

The goal of the presented project is to introduce the modern methods of numerical investigation of topological and non-topological solitons to the students of the JINR University Center. The list of model examples include:

1. Precise numerical modeling of the fractal dynamics of one-dimensional solitons, also in the presence of localising potentials and non-homogeneities.
2. Investigation of the effects of spontaneous symmetry breaking in two-component Bose-Einstein condensate, analyse of the stability of the solitons with respect to the linear perturbations.
3. Construction of the soliton solutions of the Yang-Mills theory in the anti de-Sitter space-time, investigation of their roles in the holographic description. Numerical construction of the black hole "hairy" solutions in the anti de-Sitter space-time and analyse of their links with the Yang-Mills soliton configurations.

2. Practical Goals

I. The first group of the problem is related to the numerical modeling of the dynamical chaotic structures which appear in the processes of resonance scattering of the kinks in the simple 1+1 dimensional scalar model ϕ^4 . It is known the collision of the solitons is related with resonance energy exchange between the states of perturbative and non-perturbative sectors, the kinetic

energy of the colliding solitons is transferred into the excitations of the internal mode and back to the translational mode of the kinks. The goal is to perform very precise numerical simulation of this process and investigate the role of the spacial non-homogeneities and trapping potentials.

Practical work of students is related with following set of problems:

1. Investigation of the oscillon states in the scalar models ϕ^4 and ϕ^6 .
2. Computer simulation of the process of the kink-antikink collision in the model ϕ^4 .

II. Investigation of the effect of spontaneous symmetry breaking in the Bose-Einstein condensate is one of the most interesting directions of research both from theoretical and experimental point of view. Simplest model which may describe this effect is related with double well potential which violates the symmetry of the ground state in the strong coupling regime. The problem is related with numerical investigation of the system of the coupled Gross-Pitaevskii equations which represents a mixture of two non-degenerated states.

Practical work of students is related with following set of problems:

1. Construction of static vortex solutions of the Gross-Pitaevskii equation and investigation of their linear stability.
2. Investigation of the effect of spontaneous symmetry breaking in the Bose-Einstein condensate for various non-linear interactions and trapping potentials.
3. Numerical construction of multisoliton solutions of the planar Skyrme model for various potentials.

III. The last group of the problem is related to numerical modeling of thermodynamics of hairy black holes in the AdS space and application of the holographic duality approach to evaluation of the corresponding boundary operators.

Practical work of students is related with following set of problems:

1. Numerical construction of the spherically symmetric solutions of the $SU(2)$ Yang-Mills theory in the AdS space.
2. Construction of the spherically symmetric solutions of the $SU(2)$ Einstein-Yang-Mills theory and investigation of the holographic phase transitions.

Численные методы в теории топологических солитонов

д.ф.м.-н. Я.М. Шнир

1. Аннотация

Одним из наиболее интересных направлений в современной физике является, исторически восходящее к работе Ферми-Паста-Улама (E. Fermi, J. Pasta and S. Ulam, Document LA-1940, May 1955) исследование разнообразных нелинейных систем, связанное с их крупномасштабным компьютерным моделированием и численным решением соответствующей системы уравнений. Работы в этом направлении в частности привели к открытию локализованных непертурбативных частицеподобных объектов - солитонов, возникающих в качестве решений классических полевых уравнений, причем стабильность этих объектов обеспечивается их нетривиальными топологическими свойствами. Сегодня очевидно, что солитонные полевые конфигурации играют исключительно важную роль в современной физике, даже простейшая из описывающих их систем - одномерная модель с двукратным потенциалом с солитонным решением типа кинка, имеет огромный диапазон возможных сфер применения, начиная от физики конденсированного состояния или же при описании фазовых переходов второго рода до анализа динамики космологических доменных стенок в ранней Вселенной. В физике полимеров эта система известна как модель электронного переноса в полиацителеновой цепочке. С другой стороны, эта же задача возникает при описании непертурбативных эффектов в квантовой теории поля или же при описании биологических систем, в частности при исследовании возбуждений молекул ДНК. Особо следует отметить актуальность работ в направлении компьютерного моделирования поведения Бозе-Эйнштейновского конденсата в различных системах, в том числе при наличии различных неоднородностей и локализуемых потенциалов.

Новое направление в описании топологических солитонов, возникшее в самое последнее время, связано с так называемым голографическим подходом, позволяющим установить соотношения дуальности между солитонами в искривленном пространстве-времени, и рассматриваемыми в физике конденсированных сред системами с сильной связью. В рамках этого подхода удалось значительно продвинуться в исследовании свойств сверхпроводящих сред, квантового эффекта Холла и явления сверхтекучести, исследования соответствующих моделей дуальности являются

одним из наиболее актуальных направлений современной физики работы над которым ведутся в крупнейших мировых научных центрах, в том числе ОИЯИ.

Вычислительная сложность подобных задач со многими степенями свободы во многом стимулировала развитие соответствующих вычислительных методов. Исследование свойств даже простейших одномерных солитонов обычно связано с работой мощных компьютерных систем и сетей имеющихся в ЛИТ ОИЯИ и в крупнейших зарубежных научных центрах, например Лос Аламосе (США), Дублине (Ирландия) и Дареме (Великобритания). Вычислительные методы и техника, развитые в процессе решения связанных с этим направлением проблем нашли множество применений в самых разнообразных и подчас неожиданных приложениях, например при исследовании динамики полета межпланетных аппаратов (ZARN, Бремен ФРГ и Pasadena Jet Propulsion Lab, USA), при построении моделей ранней Вселенной (суперкомпьютер "Cosmos Кембридж, Великобритания), при моделировании фазовых переходов в жидком гелии (Суперкомпьютерная система распределенных вычислений CSC-IT, Финляндия), или же при расчете свойств адронных состояний (ОИЯИ и ИТЭФ, Россия).

Предлагаемый проект направлен на обучение студентов, приезжающих на практику в ОИЯИ, методам численного исследования свойств топологических и нетопологических солитонов с использованием существующих мощностей ЛТФ ОИЯИ. В качестве различных модельных задач предлагается

1. Выполнить высокоточное компьютерное моделирование процесса фрактальной динамики солитонных конфигураций в одномерных структурах, в том числе в учетом наличия захватывающих потенциалов и неоднородностей.
2. Исследовать эффекты спонтанного нарушения симметрии в двухкомпонентном Бозе-Эйнштейновском конденсате, проанализировать стабильность соответствующих решений по отношению к линейным возмущениям исходной системы уравнений Гросса-Питаевского.
3. Построить решения модели Янга-Миллса в пространстве анти-де Ситтера, исследовать их роль в голографической картине AdS/CFT дуальности и найти их связь с решениями, описывающими черные дыры в пространстве анти-де Ситтера.

2. Формулировка практических задач

I. В качестве первой группы задач студентам предлагается компьютерное моделирование хаотических структур, возникающих в процессах резонансного рассеяния кинков простейшей скалярной модели ϕ^4 в пространстве-времени размерности $1+1$. Как известно, столкновение солитонов связано с резонансным эффектом обмена энергией между пертурбативным и непертурбативным секторами теории, кинетическая энергия сталкивающихся солитонов передается возбуждениям пертурбативного сектора, и после вторичного столкновения кинков возвращается обратно. Задача заключается в численном моделировании этого процесса, а также в анализе роли, играемой при столкновении пространственными неоднородностями и захватывающими потенциалами.

При прохождении практики студентам предполагается решить следующие задачи:

1. Исследование характеристик осцилляционного состояния в моделях ϕ^4 и ϕ^6 .
2. Компьютерное моделирование столкновительной динамики пары кинк-антикинк в модели ϕ^4 .

II. Эффект спонтанного нарушения симметрии в конденсате Бозе-Эйнштейна, связанный с нелинейностью соответствующей системы уравнений Гросса-Питаевского, является одним из актуальных направлений как теоретических, так и экспериментальных исследований. Простейшая модель, описывающая этот эффект связана с введением двумного пространственно-неоднородного потенциала, который нарушает симметрию основного состояния системы при условии что константа связи становится достаточно большой. Задача состоит в исследовании и компьютерном моделировании системы, представляющей собой смесь двух расщепленных состояний одной и той же системы. Заметим что в нелинейной оптике точным аналогом ее является распространение системы двух пучков различной поляризации или же различной длины волны, таким образом полученные результаты могут быть немедленно обобщены для этой задачи.

При прохождении практики студентам предполагается решить следующие задачи:

1. Построение статических вихревых решений уравнения Гросса-Питаевского и исследование условий их стабильности.
2. Исследование эффекта спонтанного нарушения симметрии в конденсате Бозе-Эйнштейна для различных форм нелинейного взаимодействия.
3. Построение мультисолитонных решений планарной модели Скирма и исследование их свойств в зависимости от выбора потенциала модели.

III. Цель этой группы задач заключается в исследовании термодинамических характеристик черных дыр в пространстве Шварцшильда-анти-де Ситтера на фоне сфалеронных решений теории Янга-Миллса и вычисление параметров порядка в дуальных теориях с использованием голографического подхода.

При прохождении практики студентам предполагается решить следующие задачи:

1. Построить регулярные сферически симметричные $SU(2)$ -решения теории Янга-Миллса на фоне пространства анти-де Ситтера с фиксированной метрикой.
2. Построить регулярные сферически-симметричные решения теории Эйнштейна-Янга-Миллса в четырехмерном пространстве анти-де Ситтера, и исследовать их поведение при вариации граничных условий.